

**П.В. ФЕРНАТИ**, канд. техн. наук, научный сотрудник Института механики им. С.П. Тимошенка НАН Украины (г. Киев)

## **МОДЕЛИРОВАНИЕ НЕЛИНЕЙНЫХ ПРОЦЕССОВ ПОЛЗУЧЕСТИ НА ОСНОВЕ КУБИЧНОЙ ТЕОРИИ ВЯЗКОУПРУГОСТИ**

Рассмотрена задача моделирования процесса нелинейной ползучести вязкоупругих материалов. Решение строится на основе кубической теории ползучести с дробно-экспоненциальным ядром. Найдены параметры дробно-экспоненциальных ядер нейлонов FM 10001 и FM 3001, стеклопластика ТС8/3-250 и стеклопластика контактного формования. Получено удовлетворительное согласование расчетных и экспериментальных данных. Ил.: 4. Табл.: 1. Библиогр.: 19 назв.

**Ключевые слова:** нелинейная ползучесть, кубическая теория, моделирование нелинейных процессов ползучести, дробно-экспоненциальное ядро.

**Постановка проблемы и анализ литературы.** Существует широкий класс конструкционных материалов, процессы вязкоупругого деформирования которых не проявляют линейных свойств. Для моделирования таких процессов в литературе [1, 2] предложено ряд математических моделей. Самой общей формой записи определяющих уравнений физически нелинейной наследственной среды является кратно-интегральное представление Вольтера-Фреше [3, 4]. Однако, большое количество и многомерная природа входящих в него функций интегрирования, равных числу ядер наследственности, делает задачу идентификации ядер практически не разрешимой. Обратить аналитически разложение Вольтера-Фреше также затруднительно.

Из-за трудностей идентификации ядер наследственности в рамках общей нелинейной теории Вольтера-Фреше в ряде работ построены упрощенные варианты общей теории исходя из реального характера нелинейного деформирования материала. В качестве упрощенного варианта широкое распространение получила кубическая теория [1, 2, 5 – 7].

Известны работы в которых решение задач вязкоупругости на основе кубической теории ползучести построено с использованием ядер в форме комбинации степенной и экспоненциальной функции [1, 7]. Однако более перспективными представляются дробно-экспоненциальные ядра. Эти ядра, как оказалось [9 – 12], наиболее эффективны при моделировании процессов линейного вязкоупругого деформирования. Дробно-экспоненциальные функции протабулированы и представлены отдельным изданием [13]. Кроме того, разработаны эффективные методы определения параметров дробно-экспоненциальных ядер, позволяющие достаточно точно моделировать процессы ползучести и релаксации линейных вязкоупругих материалов. Предметный анализ этих методов изложен в [14].

**Целью настоящей работы** является решение задачи моделирования нелинейных процессов ползучести вязкоупругих материалов на основе

кубичной теории ползучести с использованием дробно-экспоненциальных ядер наследственности.

**Постановка задачи исследования, основные соотношения модели.** В одномерном случае связь между деформацией  $\varepsilon(t)$  и напряжением  $\sigma(t)$  в соответствии с кратно-интегральным представлением Вольтера-Фреше задается соотношением [2]

$$\begin{aligned} \varepsilon(t) = & \frac{\sigma(t)}{E} + \frac{1}{E_1} \int_0^t K_1(t-\tau_1) \sigma(\tau_1) d\tau_1 + \frac{1}{E_2} \int_0^t \int_0^t K_2(t-\tau_1, t-\tau_2) \sigma(\tau_1) \sigma(\tau_2) d\tau_1 d\tau_2 + \\ & + \frac{1}{E_3} \int_0^t \int_0^t \int_0^t K_3(t-\tau_1, t-\tau_2, t-\tau_{32}) \sigma(\tau_1) \sigma(\tau_2) \sigma(\tau_3) d\tau_1 d\tau_2 d\tau_3 + \dots, \end{aligned} \quad (1)$$

где  $E$  – модуль упругости материала;  $K_1(\cdot)$ ,  $K_2(\cdot)$ ,  $K_3(\cdot)$  – функции интегрирования, которые являются характеристиками материала и интерпретируются как ядра ползучести;  $E_1$ ,  $E_2$ ,  $E_3$  – постоянные.

Ограничивая уравнение (1) тремя интегральными членами и считая далее, что вязкоупругие свойства материала при растяжении и сжатии одинаковы, и исключая соответственно из (1) двойной интеграл, получаем нелинейное определяющее уравнение кубичной теории [1]

$$\varepsilon(t) = \frac{1}{E} \left[ \sigma(t) + \lambda \int_0^t K_1(t-\tau) \sigma(\tau) d\tau \right] + b \int_0^t K_3(t-\tau) \sigma^3(\tau) d\tau, \quad (2)$$

которое используется для моделирования ползучести вязкоупругих материалов, когда в зависимости от уровня напряжений можно выделить линейную и нелинейную области вязкоупругих свойств. Здесь  $K_1(t-\tau)$  и  $K_3(t-\tau)$  – ядра наследственности в линейной и нелинейной области соответственно,  $\lambda$  и  $b$  – реологические параметры.

В качестве ядер ползучести  $K(t-\tau)$  в нелинейном интегральном уравнении (2) используется дробно-экспоненциальное ядро [2]

$$K(t-\tau) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-\beta)^n (t-\tau)^{\alpha+(1+\alpha)n}}{\Gamma[(1+\alpha)(1+n)]}, \quad (3)$$

где  $\alpha$ ,  $\beta$  – параметры ядра, подлежащие определению из экспериментов на ползучесть или на релаксацию ( $-1 < \alpha < 0$ ;  $\beta > 0$ );  $\Gamma[\cdot]$  – гамма-функция.

Параметры  $\alpha$  и  $\beta$  дробно-экспоненциального ядра (3), а также реологические параметры  $\lambda$  и  $b$  в уравнении (2) определяются по результатам обработки экспериментальных данных на одноосную ползучесть при фиксированной температуре и нескольких уровнях постоянных напряжений. В этом случае величина напряжения  $\sigma(t)$  задается соотношением

$$\sigma(t) = h(t)\sigma_k; \quad (k = \overline{1, m}), \quad (4)$$

где  $h(t)$  – единичная функция Хевисайда ( $h(t) = 0$  при  $t < 0$  и ( $h(t) = 1$  при  $t \geq 0$ ), а  $\sigma_k = const$ .

Рассмотренная выше математическая модель используется для моделирования стационарной ползучести нейлона FM 10001, нейлона FM 3001, стеклопластика ТС8/3-250, стеклопластика контактного формования. Экспериментальные данные рассмотренных материалов заимствованы соответственно из [15,16,17].

Задача заключается в определении по экспериментальным данным реологических параметров и параметров дробно-экспоненциальных ядер наследственности рассматриваемой модели и расчете на их основе деформаций длительного вязкоупругого деформирования исследуемых материалов.

**Методика идентификации параметров определяющих уравнений модели.** Кубичная теория является частным случаем общей нелинейной теории вязкоупругости Вольтера-Фреше, определяющие уравнения которой включают только линейный и кубичный члены. Ползучесть материала, как собственно и релаксация напряжений, описывается двумя независимыми ядрами, отражающими линейное и нелинейное вязкоупругое деформирование материала.

Методика определения коэффициентов и параметров ядер ползучести в кубичной теории (2) реализуется следующим образом [1, 7].

Пусть имеется семейство кривых ползучести " $\varepsilon - t$ " при разных уровнях постоянных напряжений  $\sigma_k$ , каждое из которых достигнуто ступенчатым нагружением согласно (4). Определяющее уравнение ползучести (2) с учетом (4) записывается в виде

$$\varepsilon(t) = \frac{\sigma_k}{E} \left[ 1 + \lambda_1 \int_0^t K_1(\tau) d\tau \right] + \sigma^3 b \int_0^t K_3(\tau) d\tau, \quad (5)$$

где принято, что  $h(t) = 1$ .

Параметры ядер ползучести и неизвестные коэффициенты в (5) определяются в два этапа. На первом этапе определяются параметры ядра ползучести  $K_1(t)$  и параметр  $\lambda_1$ , описывающие линейное вязкоупругое деформирование материала. В этом случае уравнение (5) преобразуется к линейному интегральному уравнению

$$\frac{\bar{\varepsilon}(t)}{\bar{\sigma}_k} = \frac{1}{E} \left( 1 + \lambda_1 \int_0^t K_1(\tau) \sigma(\tau) d\tau \right), \quad (6)$$

неизвестные параметры которого определяются путем минимизации функционала

$$F(\lambda_1, \bar{p}_i) = \sum_{k=1}^m \sum_{j=1}^n \left\{ \frac{\bar{\varepsilon}(t_j, \bar{\sigma}_k)}{\bar{\sigma}_k} - \frac{1}{E} \left[ 1 + \lambda_1 \int_0^t K_1(\tau, \bar{p}_1) d\tau \right] \right\}^2. \quad (7)$$

Здесь  $\bar{p}_1$  – параметры ядра ползучести  $K_1(t)$ ;  $\bar{\varepsilon}(\cdot)$  – экспериментальные значения деформаций ползучести в линейной области ( $\bar{\sigma}_k < \sigma_*$ ).

На втором этапе определяются параметры ядра ползучести  $K_3(t)$  и коэффициентов  $b = \lambda_3 E_3^{-1}$ , описывающие деформирование материала в нелинейной области. В этом случае уравнение (5) можно представить в виде

$$E \frac{\tilde{\varepsilon}(t_j, \tilde{\sigma}_k)}{\tilde{\sigma}_k} - \left( 1 + \lambda_1 \int_0^t K_1(\tau, \bar{p}_1) d\tau \right) = b E \tilde{\sigma}_k^2 \int_0^t K_3(\tau) d\tau, \quad (8)$$

где величина

$$I(t_j, \tilde{\sigma}_k) \equiv E \frac{\tilde{\varepsilon}(t_j, \tilde{\sigma}_k)}{\tilde{\sigma}_k} - \left( 1 + \lambda_1 \int_0^t K_1(\tau, \bar{p}_1) d\tau \right) \quad (9)$$

известна, поскольку величины  $\tilde{\varepsilon}(t_j, \tilde{\sigma}_k)$  измеряются по экспериментальным кривым ползучести в нелинейной области ( $\tilde{\sigma}_k > \sigma_*$ ), а значения параметров  $\bar{p}_1$  определяются согласно (7).

Параметры ядра ползучести  $K_3(t)$  и величина коэффициента  $b$ , исходя из (8) и (9), определяются по результатам аппроксимации дискретных значений величины  $I(t, \tilde{\sigma}_k)$  путем минимизации функционала

$$F(b, \tilde{p}_i) = \sum_{k=1}^m \sum_{j=1}^n \left\{ I(t_j, \tilde{\sigma}_k) - b E \tilde{\sigma}_k^2 \int_0^t K_3(\tau, \bar{p}_3) d\tau \right\}^2, \quad (10)$$

где  $\bar{p}_3$  – параметры ядра ползучести  $K_3(\cdot)$ .

**Определение области линейности вязкоупругих свойств.** При определении коэффициентов и параметров ядер наследственности в кубичной теории методикой предусмотрено выделение двух областей напряжений, вызывающих линейное и соответственно нелинейное вязкоупругое деформирование материала. Эта задача решается на основе анализа экспериментальных функций ползучести (6).

По заданным кривым ползучести строятся функции ползучести и

$$J_k(t) = \frac{\varepsilon(t)}{\sigma_k} = \frac{1}{E} \left[ 1 + \lambda_1 \int_0^t K_1(\tau) d\tau \right] + \frac{\sigma_k^2}{E_3} \lambda_3 \int_0^t K_3(\tau) d\tau, \quad (11)$$

определяется область линейности вязкоупругих свойств материала. Считается, что материал обладает линейными вязкоупругими свойствами в некоторой области напряжений  $0 < \sigma_k < \sigma_*$ , если в этой области функция ползучести (11)

не зависит от уровня напряжений. Аналитически условие линейности с учетом статистической природы вязкоупругих свойств материала записывается в виде

$$t_{\alpha,k} = \frac{\delta \bar{J}(t_j) \sqrt{n}}{S_j(t_j)} > t_{\alpha,k}^*, \quad (j = \overline{1, n}), \quad (12)$$

где  $t_{\alpha,k}$  и  $t_{\alpha,k}^*$  – расчетное и критическое значения квантиля статистики;  $\bar{J}(t_j)$  – выборочное среднее значение функции ползучести;  $S_j(t_j)$  – выборочное среднее квадратичное отклонение величины  $\bar{J}(t_j)$ ;  $n$  – объем выборки (число функций ползучести);  $\delta$  – величина погрешности, с которой выполняется условие существования единой функции ползучести;  $j$  – число временных интервалов разбиения экспериментальной кривой ползучести. Величина  $t_{\alpha,k}^*$  определяется по таблицам [18].

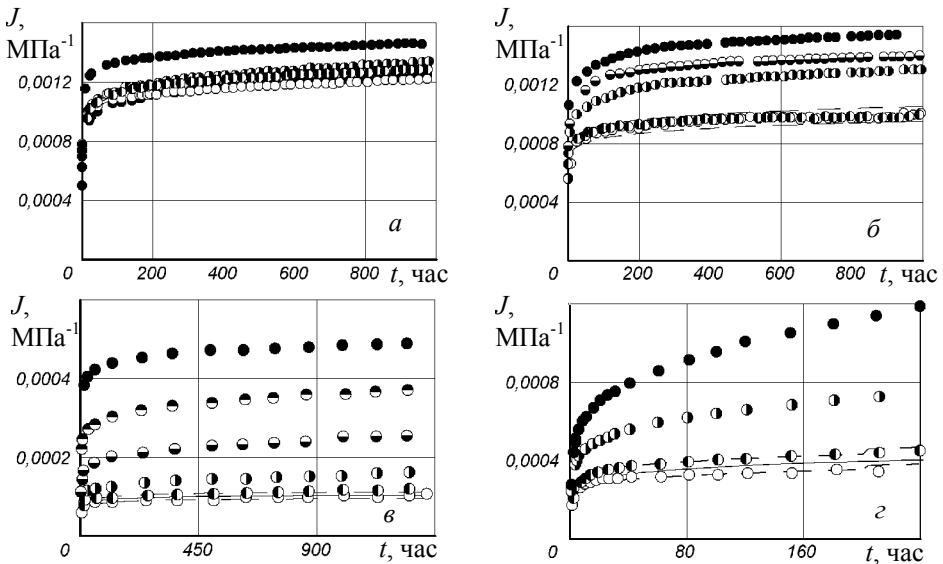


Рис.1. Функции ползучести (а) нейлона FM 10001, (б) нейлона FM 3001, (в) стеклопластика TC8/3-250, (г) стеклопластика контактного формования

На рис. 1 точками представлены экспериментальные значения функций ползучести  $J_k(t_j)$  для нейлоновых волокон FM 10001 (а) при температуре  $\theta = 25^\circ \text{C}$  и  $\sigma_k = 3,2$  ( $\circ$ ),  $5,0$  ( $\ominus$ ),  $6,8$  ( $\bullet$ ),  $9,3$  ( $\bullet$ ),  $12,4$  ( $\bullet$ ) МПа, нейлоновых волокон FM3001 (б) при  $\theta = 23^\circ \text{C}$  и  $\sigma_k = 3,3$  ( $\circ$ ),  $4,1$  ( $\ominus$ ),  $8,3$  ( $\bullet$ ),  $12,4$  ( $\bullet$ ),  $16,6$  ( $\bullet$ ) МПа, стеклотекстолита TC8/3-250 (в) при  $\theta = 23,5^\circ \text{C}$  и  $\sigma_k = 20,3$  ( $\circ$ ),  $40,6$

(●), 60,9 (●), 81,2 (●), 101,5 (●), 121,8 (●), 142,1 (●) МПа и стеклопластика контактного формования (г) при  $\theta = 23,5$  °С и  $\sigma_k = 5$  (○), 10 (●), 20 (●), 30 (●) МПа. Тонкими штриховыми линиями нанесены границы интервала построенного относительно функции ползучести  $\bar{J}(t_j)$  и задаваемого величиной  $\delta = \pm 5\%$ .

Из данных, приведенных на рис. 1, следует, что для всех рассмотренных материалов можно выделить область напряжений, в которой функции ползучести  $J_k(t_j)$  с погрешностью  $\delta_{\max} = \pm 5\%$  относительно величины  $\bar{J}(t_j)$  оказываются инвариантными по отношению к уровню напряжений  $\sigma_k$ , а материалы соответственно обладают линейными вязкоупругими свойствами. Для волокна FM10001 эта область включает напряжения  $\bar{\sigma}_k = 3,2 \pm 9,3$  МПа, для волокна FM 3001 –  $\bar{\sigma}_k = 3,3 \pm 4,1$  МПа, для стеклотекстолита ТС8/3-250 –  $\bar{\sigma}_k = 19,91 \pm 39,82$  МПа и для стеклопластика –  $\bar{\sigma}_k = 4,9 \pm 9,81$  МПа. Условие линейности (12) выполняется при этом во всем исследованном временном интервале с вероятностью  $p = 90\%$ .

В качестве примера на рис. 2 сопоставлены значения критического  $t_{\alpha,k}^*$  (сплошная линия) и расчетного  $t_{\alpha,k}$  (пунктирная линия) значения квантиля статистики найденного для нейлоновых волокон FM 10001 (а) – при учете всех кривых  $J_k(t_j)$ , (б) – при учете кривых  $J_k(t_j)$ , соответствующих интервалу напряжений  $\bar{\sigma}_k = 3,2 \pm 9,3$  МПа.

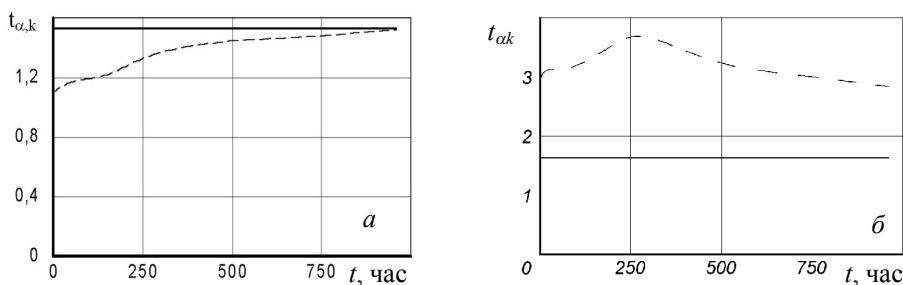


Рис. 2. Расчетные  $t_{\alpha,k}$  и критические  $t_{\alpha,k}^*$  значения квантиля статистики для нейлона FM 10001

**Идентификация параметров определяющих уравнений модели.** Экспериментальные значения деформаций ползучести  $\varepsilon(t_j, \sigma_k)$ , замеренные по кривым ползучести в области напряжений  $\bar{\sigma}_k$ , которые удовлетворяют

условиям линейности вязкоупругих свойств нейлоновых волокон, стеклотекстолита и стеклопластика, используются для определения параметров дробно-экспоненциальных ядер (3). В этом случае функционал (7) с учетом (3) записывается в виде

$$F(\alpha_1, \beta_1, \lambda_1) = \sum_{k=1}^m \sum_{j=1}^n \left\{ \frac{\bar{\varepsilon}(t_j, \bar{\sigma}_k)}{\bar{\sigma}_k} - \frac{1}{E} \left[ 1 + \lambda_1 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-\beta)^n t_j^{(1+\alpha_1)(1+n)}}{\Gamma[1 + (1+n)(1+\alpha_1)]} \right] \right\}^2, \quad (13)$$

минимизируя который находим значения параметров  $\alpha_1$ ,  $\beta_1$  и  $\lambda_1$ . Здесь и далее процедура минимизации функционалов при определении параметров ядер ползучести решается с использованием итерационного метода Левенберга-Маркардта [19].

Значения параметров  $\alpha_1$ ,  $\beta_1$  и  $\lambda_1$ , рассчитанных согласно (13), приведены в таблице.

Таблица

Материал	$E$ , МПа	$\alpha_1$	$\beta_1$ , час $^{-(1+\alpha)}$	$\lambda_1$ , час $^{(1+\alpha)}$	$b$ , МПа $^{-3} \times$ $\times$ час $^{(1+\alpha)}$	$\alpha_3$	$\beta_3$ , час $^{-(1+\alpha)}$
Волокно FM10001	1709,9	−0,859	0,04122	0,4636	$1,169 \cdot 10^{-6}$	−0,859	0,5222
Волокно FM3001	1889,2	−0,830	0,10829	0,3511	$0,780 \cdot 10^{-6}$	−0,798	0,4212
Стеклотекстолит ТС8/3-250	15690	−0,406	0,07965	0,0537	$1,780 \cdot 10^{-3}$	−0,844	0,3778
Стеклопластик	4888,2	−0,573	0,08765	0,1600	$2,040 \cdot 10^{-7}$	−0,586	0,0985

На рис. 1. сплошной линией показаны значения функции ползучести рассчитанные по уравнению (6) с использованием найденных коэффициентов.

Подставляя далее (3) в (10), получаем соотношение

$$I(t_j, \tilde{\sigma}_k) = E \frac{\tilde{\varepsilon}(t_j, \tilde{\sigma}_k)}{\tilde{\sigma}_k} - \left[ 1 + \lambda_1 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-\beta_1)^n t_j^{(1+\alpha_1)(1+n)}}{\Gamma[1 + (1+\alpha_1)(1+n)]} \right], \quad (14)$$

используемое для расчета значений величины  $I(t_j, \tilde{\sigma}_k)$ , по которым определяют параметры ядра ползучести  $K_3(t)$  в нелинейной области.

Значения величины  $I(t_j, \tilde{\sigma}_k)$ , рассчитанные по соотношению (14), представлены для исследованных материалов на рис. 3 точками. Расчеты выполнены с использованием параметров  $\alpha_1$ ,  $\beta_1$  и  $\lambda_1$ , приведенных в таблице и значений деформаций ползучести  $\tilde{\varepsilon}(t_j, \tilde{\sigma}_k)$ , замеренных по кривым ползучести в нелинейной области при напряжениях  $\tilde{\sigma}_k = 12,4$  МПа для волокна FM 10001 (а),  $\tilde{\sigma}_k = 8,3$  (●), 12,4 (●), 16,6 (●) МПа для волокна FM 3001

(б),  $\tilde{\sigma}_k = 59,72$  (●), 79,63 (●), 99,53 (●), 119,45 (●) МПа для стеклопластика TC8/3-250 (в),  $\tilde{\sigma}_k = 19,61$  (●), 24,51 (●) МПа для стеклопластика контактного формования (г).

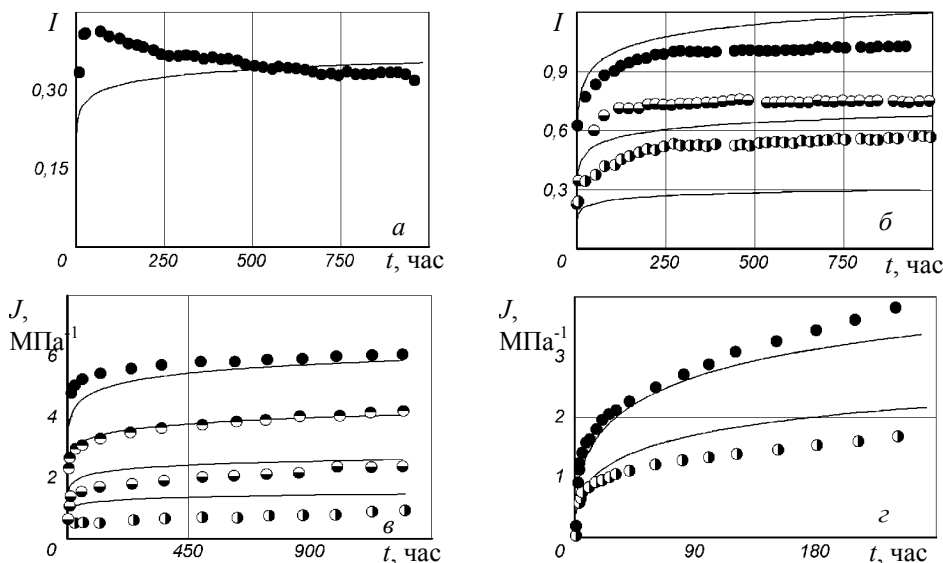


Рис. 3. Расчетные значения и аппроксимация величины  $I(t_j, \tilde{\sigma}_k)$  (а) нейлона FM 10001, (б) нейлона FM 3001, (в) стеклопластика TC8/3-250, (г) стеклопластика контактного формования

В этом случае, функционал (7) с учетом (3) записывается в виде

$$F(\alpha_3, \beta_3, b) = \sum_{k=1}^m \sum_{j=1}^n \left\{ I(t_j, \tilde{\sigma}_k) - b E \tilde{\sigma}_k^2 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-\beta_3)^n t_i^{(1+\alpha_3)(1+n)}}{\Gamma[1 + (1 + \alpha_3)(1 + n)]} \right\}^2, \quad (15)$$

минимизируя который находим значения параметров  $\alpha_3$ ,  $\beta_3$  и  $\lambda_3$ . Значения параметров  $\alpha_3$ ,  $\beta_3$  и  $\lambda_3$  для исследованных материалов, рассчитанных согласно (15), приведены в таблице, а на рис. 3 тонкими сплошными линиями показана соответствующая этим значениям параметров аппроксимация дискретных значений величины  $I(t_j, \tilde{\sigma}_k)$ .

**Экспериментальная апробация модели.** Простейшая проверка применимости дробно-экспоненциального ядра (3) в кубичной наследственной теории и параметров ядер, найденных в предположении существования области линейности и области нелинейности вязкоупругих свойств материала, для решения задач нелинейной теории вязкоупругости может быть



осуществлена на примере расчета деформаций ползучести при постоянных напряжениях.

Зависимость деформации ползучести  $\varepsilon$  от времени  $t$  при нагружении постоянными напряжениями  $\sigma_k$  записывается, исходя из (2) с учетом (3) и (4) в виде

$$\varepsilon(t) = \frac{\sigma_k}{E} \left[ 1 + \lambda \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-\beta_1)^n t^{(1+\alpha_1)(1+n)}}{\Gamma[1 + (1+\alpha_1)(1+n)]} \right] + b \sigma_k^3 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-\beta_3)^n t^{(1+\alpha_3)(1+n)}}{\Gamma[1 + (1+\alpha_3)(1+n)]}, \quad (16)$$

где принято, что  $\tau = 0$ ,  $t - \tau = t$ , а  $h(t) = 1$ .

Значения деформаций ползучести  $\varepsilon(t)$ , рассчитанных по уравнению (16) с использованием значений параметров  $\alpha_1$ ,  $\beta_1$ ,  $\lambda_1$ ,  $\alpha_3$ ,  $\beta_3$ ,  $b$ , приведенных в таблице, сопоставлены на рис. 4 с экспериментальными данными для нейлоновых волокон FM10001 (а) и FM3001 (б), стеклопластика ТС 8/3-250 (в) и стеклопластика контактного формования (г) при растяжении под углом  $\varphi = 45^\circ$  к направлению армирования. Результаты расчетов нанесены штриховыми линиями, а экспериментальные данные показаны точками. Обозначения уровня приложенных напряжений совпадают с принятыми на рис.1.

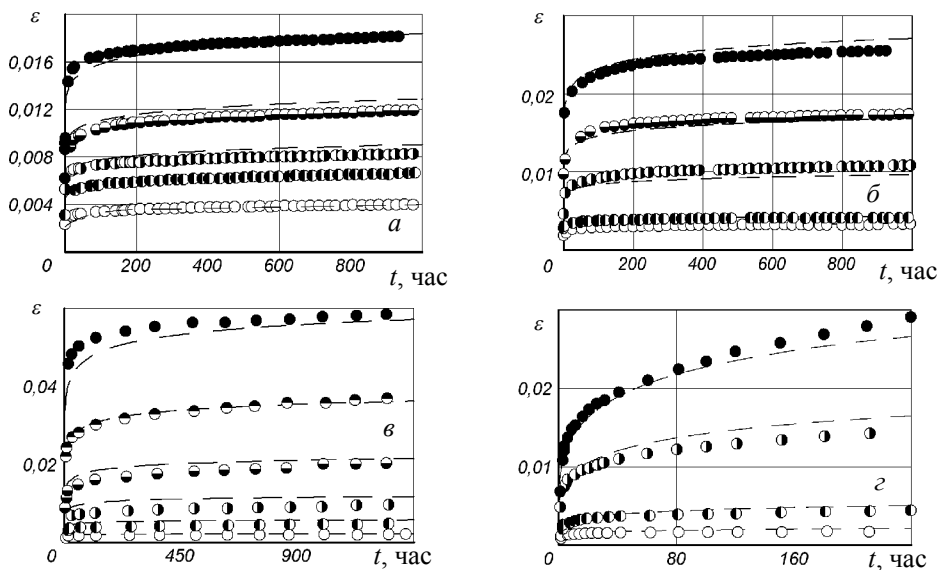


Рис. 4. Расчетные (пунктирные линии) и экспериментальные значения (точки) деформаций ползучести (а) нейлона FM 10001, (б) нейлона FM 3001, (в) стеклопластика ТС8/3-250, (г) стеклопластика контактного формования

**Выводы** Нелинейный процесс ползучести исследованных вязкоупругих материалов с достаточной степенью точности описывается нелинейной кубической моделью. В качестве ядра наследственности в модели используется дробно-экспоненциальное ядро. В работе предложен метод идентификации параметров дробно-экспоненциальных ядер, входящих в определяющие уравнения рассмотренной модели.

Как видно из данных представленных на рис. 4, получено удовлетворительное согласование результатов расчета деформаций ползучести исследованных материалов при стационарном режиме нагружения с экспериментальными данными, что подтверждает целесообразность использования дробно-экспоненциального ядра в кубической теории. Максимальная погрешность расчетов не превысила 10 %.

**Список литературы:** 1. Колтунов М.А. Ползучесть и релаксация / М.А. Колтунов. – М.: Высшая школа, 1976. – 278 с. 2. Работнов Ю.Н. Элементы наследственной механики твердых тел / Ю.Н. Работнов. – М.: Наука, 1977. – 384 с. 3. Volterra V. Leçons sur les fonctions de lignes / V. Volterra. – Paris: Goutier-Villard, 1913. – 230 p. 4. Green A.E. The mechanics of non-linear materials with memory / A.E. Green, R.S. Rivlin // Arch. Rat. Mech. Anal. – 1957. – 1. – P. 1-21. 5. Ward I.M. Non-linear mechanical behaviour of oriented polypropylene / I.M. Ward, E.T. Onat // J. Mech. Phys. Solids. – 1963. – 11. – № 4. – P. 217-229. 6. Ильющин А.А. Основы математической теории термовязкоупругости / А.А. Ильющин, Б.Е. Победря. – М.: Наука. – 1970. – 240 с. 7. Кучер Н.К. Кратковременная ползучесть и прочность полипропиленовых волокнистых структур / Н.К. Кучер, М.П. Земцов, Е.Л. Данильчук // Probl. прочности. – 2007. – № 6. – С. 77-90. 8. Ржаницын А.Р. Некоторые вопросы механики систем, деформируемых во времени / А.Р. Ржаницын. – М.: Гостехиздат, 1969. – 252 с. 9. Звонов Е.Н. Определение характеристик ползучести линейных упруго-наследственных материалов с использованием ЭЦВМ / Е.Н. Звонов, Н.И. Малинин, Л.Х. Паперник, Б.М. Цейтлин // Изв. АН СССР, МТТ. – 1968. – № 5. – С. 76-82. 10. Гольдман А.Я. Способ определения параметров для описания кривой ползучести упругонаследственных материалов на основе таблицы  $\Theta_a$  – функции Работнова / А.Я. Гольдман, В.В. Щербак, Е.Н. Кислов, Е.И. Дворский // Машиноведение. – 1977. – № 6. – С. 77-82. 11. Демидова И.И. Об описании реологии полимеров с помощью суммы дробно-экспоненциальных функций / И.И. Демидова, В.С. Екельчик // В кн.: Исследования по упругости и пластичности. – Вып. 12. – 1978. – С. 107-113. 12. Гаврилов Д.А. Метод определения параметров ползучести вязко-упругих материалов / Д.А. Гаврилов, В.Н. Потсаев // Прикл. механика. – 1982. – 18. – № 5. – С. 125-127. 13. Работнов Ю.Н. Таблицы дробно-экспоненциальной функции отрицательных параметров и интеграла от неё / Ю.Н. Работнов, А.Х. Паперник, Е.Н. Звонов. – М.: Наука, 1969. – 132 с. 14. Golub V.P. To the problem of determination of parameters of the fractional-exponential heredity kernels of linealy viscoelastic materials / V.P. Golub, P.V. Fernati, Ya.G. Lyashenko // Int. App. Mech. – 2008. – 40. – № 9. – P. 963-974. 15. Marin J. Creep-time relations for nylon in tension, compression, bending, and torsion / J. Marin, A.C. Webber, G.F. Weissmann // Proc. ASTM. – 1954. – Vol. 54. – P. 1313-1343. 16. Работнов Ю.Н. Нелинейная ползучесть стеклопластика TC8/3-250 / Ю.Н. Работнов, А.Х. Паперник, Е.И. Степанычев // Механика полимеров. – 1971. – № 3. – С. 391-397. 17. Керштейн И.М. Область линейности деформационных свойств стеклопластика контактного формования / И.М. Керштейн, Р.Д. Степанов, П.М. Огибалов // Механика полимеров. – 1970. – № 3. – С. 404-410. 18. Степанов М.Н. Статистическая обработка результатов механических испытаний / М.Н. Степанов. – М.: Машиностроение, 1972. – 232 с. 19. More J.J. Users guide to minipack / J.J. More, B.S. Garbow, K.E. Hillstrom // Argonne National Laboratory Publication ANL-80-74. – 1980. – 238 p.

*Статья представлена д.т.н. проф. Института механики им. С.П. Тимошенка НАН Украины Голубом В.П.*

УДК 539.376

**Моделювання нелінійних процесів повзучості на підставі кубічної теорії в'язкопружності / Фернаті П.В.** // Вісник НТУ "ХПІ". Тематичний випуск: Інформатика і моделювання. – Харків: НТУ "ХПІ". – 2010. – № 21. – С. 182 – 192.

Розглянута задача моделювання процесу нелінійної повзучості в'язкопружних матеріалів. Розв'язок будується на підставі кубічної теорії повзучості з дробово-експоненційним ядром. Визначені параметри дробово-експоненційних ядер нейлонів FM 10001 і FM 3001, склопластика TC8/3-250 і склопластика контактного формування. Отримане задовільне узгодження розрахунків з експериментами. Іл.: 4. Табл.: 1. Бібліогр.: 19 назв.

**Ключові слова:** нелінійна повзучість, кубічна теорія, моделювання нелінійних процесів повзучості, дробово-експоненційне ядро.

UDC 539.376

**The modeling of nonlinear process of creep on the cube theory of viscoelasticity / Fernati P.V.** // Herald of the National Technical University "KhPI". Subject issue: Information Science and Modelling. – Kharkov: NTU "KhPI". – 2010. – №. 21. – P. 182 – 192.

The problem of the modeling of nonlinear creep process of viscoelastic materials is considered. The solution is constructed on the cube theory using the exponential-fractional kernel. The parameters of exponential-fractional kernels of nylons FM 10001 and FM 3001, glass-plastic TC8/3-250 and glass-plastic of contact formation are determined. The calculation results are in a good agreement with those obtained from an experiment. Figs: 4. Tabl.: 1. Refs: 19 titles.

**Keywords:** nonlinear creep, cube theory, modeling of nonlinear process of creep, exponential-fractional kernel.